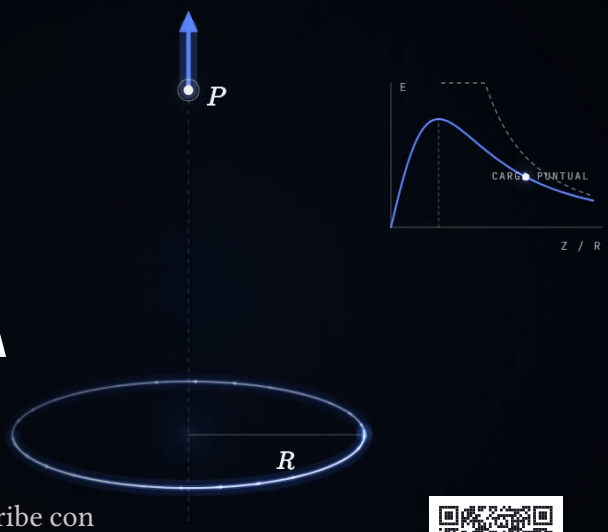


CLASE 05 · CAPÍTULO 2 · DISTRIBUCIONES CONTINUAS · 2:48 MIN

DE LO DISCRETO A LO CONTINUO

Cuando la carga es demasiada para contarla de a una, se describe con una densidad y la suma de Coulomb se convierte en una integral.

VER LA CLASE

BNSOLUTIONS.CL/LECTURES

01 IDEAS CLAVE

La carga se ve continua

Un solo nanocoulomb equivale a unas $6{,}24 \times 10^9$ cargas elementales. La carga sigue cuantizada, pero a la escala de un alambre o de una placa se describe mejor como algo repartido de forma continua. Es un modelo macroscópico, no una afirmación sobre los electrones.

Densidades y elemento de carga

En lugar de cargas puntuales se usa una densidad: λ en una línea (C/m), σ en una superficie (C/m²) y ρ en un volumen (C/m³). Cada trocito aporta una carga dq que se obtiene multiplicando la densidad por su longitud, área o volumen. Siempre vale $Q = \int dq$; las expresiones $\lambda = Q/\ell$ o $\sigma = Q/A$ solo sirven si la densidad es uniforme.

De la suma a la integral

Se parte la distribución en trozos y cada uno se trata como una carga puntual. En el video, con P sobre la mediatriz de una barra a una distancia de $0{,}1\,L$, dos trozos dan un campo un 74 % menor que el exacto; ocho trozos fallan por un 4 % y dieciséis, por un 0,03 %. En el límite de infinitos trozos la suma pasa a ser una integral: la física es la misma y solo cambia la forma de sumar.

La simetría trabaja antes que la integral

En el arco, el anillo, el disco y la barra vista desde su mediatriz, los aportes de trozos simétricos cancelan sus componentes transversales y solo hay que integrar una componente. En la barra vista desde su propio eje no hay nada que cancelar, pero todos los aportes apuntan igual. La posición de P forma parte del problema: la misma barra produce cancelaciones distintas según dónde se mire.

Mientras más extendida la carga, más lento cae el campo

Al doble de distancia, el campo de una carga puntual se reduce a un cuarto ($1/r^2$), el de una línea infinita a la mitad ($1/y$) y el de un plano infinito no cambia. Los dos últimos son límites de la barra y del disco cuando su tamaño crece sin fin. La próxima clase muestra que, con suficiente simetría, la ley de Gauss entrega esos mismos resultados en pocas líneas.

02 FÓRMULAS

$$\vec{E}(P) = \int k_e \frac{dq}{r^2}\,\hat{r}$$

Superposición para una distribución continua. $\hat{r}$ apunta desde cada elemento hacia P; tanto r como $\hat{r}$ cambian de un elemento a otro.

$$dq = \lambda\, ds, \qquad dq = \sigma\, dA, \qquad dq = \rho\, dV$$

Elemento de carga en una línea, una superficie y un volumen. ds, dA y dV dependen de la geometría (por ejemplo, $ds = R\,d\varphi$ en un arco).

$$E_{\text{arco}} = \frac{2k_e|\lambda|\sin\theta_0}{r}$$

Arco de radio r y apertura $2\theta_0$, con P en su centro. Apunta sobre la bisectriz, alejándose del arco si $\lambda > 0$. Para el círculo completo ($\theta_0 = \pi$) da cero.

$$E_{\text{anillo}} = \frac{k_e|Q|\,z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Anillo de radio R, con P sobre su eje a distancia z del centro. Vale cero en $z = 0$, es máximo en $z = R/\sqrt{2}$ y para $z \gg R$ se parece al de una carga puntual.

$$E_{\text{disco}} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \xrightarrow{R\to\infty} \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$

Disco de radio R, sumado como una pila de anillos, con P sobre el eje. Si el radio crece sin fin se obtiene el plano infinito, cuyo campo no depende de la distancia.

$$E_{\text{mediatriz}} = \frac{2k_e|\lambda|\sin\beta_0}{y} \xrightarrow{L\to\infty} \frac{2k_e|\lambda|}{y} = \frac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_0\, y}$$

Barra de largo L vista desde su mediatriz a distancia y; β_0 es el semiángulo con que se ve la barra, $\sin\beta_0 = (L/2)/\sqrt{y^2 + L^2/4}$. El límite es la línea infinita.

03 EJEMPLO RESUELTO

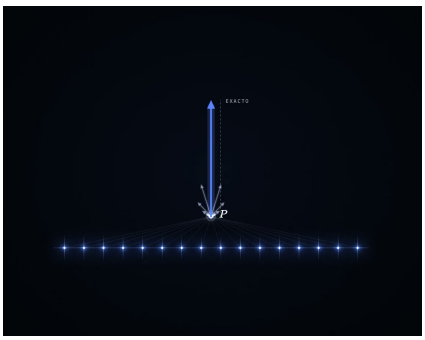
RESUELTO PASO A PASO

Una barra de 0,80 m tiene una densidad uniforme $\lambda = 5{,}0$ nC/m. Calcular el campo en un punto P de su mediatriz a 0,30 m del centro (la geometría de la barra del video) y compararlo con el de una línea infinita con la misma densidad.

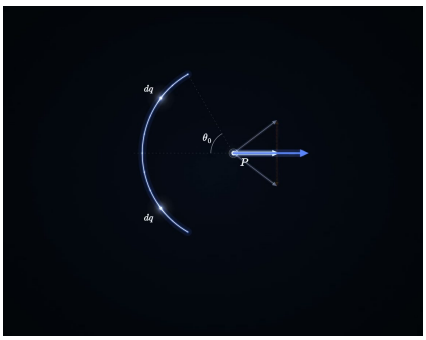
1. Ejes: la barra sobre el eje x, de $-L/2$ a $L/2$, y $P = (0, y)$. Un trozo en x tiene $dq = \lambda\,dx$ y está a $r = \sqrt{x^2+y^2}$ de P.
2. Simetría: los trozos en x y $-x$ tienen la misma carga y sus componentes dE_x son opuestas, así que $E_x = 0$. Queda $dE_y = k_e\lambda\, y\, dx/(x^2+y^2)^{3/2}$.
3. Integral: $E_y = k_e\lambda y \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{k_e\lambda L}{y\sqrt{y^2+L^2/4}} = \frac{2k_e\lambda\sin\beta_0}{y}$.
4. Geometría: $\sin\beta_0 = \frac{0{,}40}{\sqrt{0{,}30^2+0{,}40^2}} = 0{,}80$, es decir, $\beta_0 = 53{,}1^\circ$.
5. Números: $E = \frac{2(8{,}99\times10^9)(5{,}0\times10^{-9})(0{,}80)}{0{,}30} = 239{,}7$ N/C. Una suma directa de 200 000 trozos da el mismo valor.
6. Comparación: la línea infinita da $2k_e\lambda/y = 299{,}7$ N/C. La barra finita entrega el 80 % de ese valor, que es justamente $\sin\beta_0$.

RESULTADO $E \approx 240$ N/C (239,7 N/C), perpendicular a la barra y alejándose de ella; es el 80 % del campo de una línea infinita a la misma distancia.

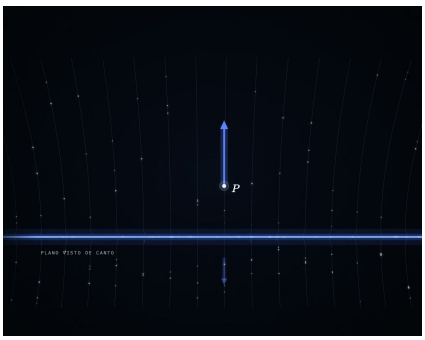
04 EN EL VIDEO



MINUTO 0:48



MINUTO 1:08



MINUTO 1:47

05 ¡OJO!

- Se suman vectores, no módulos. Antes de integrar hay que descomponer $d\vec{E}$ y decidir qué componentes se cancelan.
- Solo sale de la integral lo que es constante al recorrer la carga. En la barra, r y la dirección de $d\vec{E}$ cambian con x; en el arco, r es constante, pero la dirección no.
- Cada fórmula de la tabla vale para una densidad uniforme y para la posición de P con que se dedujo. Si cambia la geometría, la uniformidad o el punto, hay que volver a plantear la integral.
- No confundir los dos límites de la barra: desde su eje, con $L \to \infty$, queda la barra semiinfinita $E = k_e|\lambda|/x_0$; desde la mediatriz queda la línea infinita $E = 2k_e|\lambda|/y$.

06 PARA PENSAR

? ¿Por qué el campo en el centro de un anillo completo es cero, si cada trozo del anillo sí produce campo ahí?

? Si se pudiera medir el campo de un alambre cargado muy cerca de un electrón individual, ¿seguiría siendo válido el modelo continuo?

? El campo de un plano infinito no cambia con la distancia. ¿Qué tendría que pasarle a ese campo si uno se aleja hasta ver la placa real, que es finita?

? En la barra vista desde su eje, ¿por qué los trozos cercanos a P pesan mucho más que los lejanos, si todos tienen la misma carga?

07 EJERCICIOS

DIFICULTAD ●○○ DIRECTA ●●○ COMBINA IDEAS ●●● DESAFÍO · SOLUCIONES AL FINAL

01 ●○○

Un alambre recto de 20 cm tiene una carga de 1,0 nC repartida de forma uniforme. Calcular su densidad lineal y cuántas cargas elementales hay en total.

02 ●○○

Un arco de radio 0,10 m abarca 120° (semiapertura $\theta_0 = 60°$) y tiene densidad uniforme $\lambda = 2{,}0$ nC/m. Calcular el campo en su centro.

03 ●●○

Un anillo de radio $R = 0{,}10$ m tiene una carga de 5,0 nC. a) Calcular el campo en su eje a $z = 0{,}20$ m del centro. b) ¿A qué distancia el campo en el eje es máximo y cuánto vale?

04 ●●●

Una barra de largo $L = 0{,}45$ m con $\lambda = 3{,}0$ nC/m está sobre el eje x. El punto P está sobre la prolongación de la barra, a $x_0 = 0{,}15$ m del extremo cercano (la proporción del video, $x_0 = L/3$). a) Plantear la integral y calcular el campo en P. b) ¿Qué fracción del campo aporta el cuarto de barra más cercano a P?

08 SOLUCIONES

EJERCICIO 01

Como la densidad es uniforme, $\lambda = Q/\ell = 1{,}0 \times 10^{-9}/0{,}20$. El número de cargas es $N = Q/e = 1{,}0 \times 10^{-9}/1{,}602 \times 10^{-19}$.

$\lambda = 5{,}0$ nC/m y $N \approx 6{,}24 \times 10^{9}$ cargas elementales.

EJERCICIO 02

Todos los trozos están a la misma distancia r y las componentes perpendiculares a la bisectriz se cancelan: $E = \frac{2k_e \lambda \sin\theta_0}{r} = \frac{2(8{,}99\times10^{9})(2{,}0\times10^{-9})\sin 60^\circ}{0{,}10}$.

$E \approx 311$ N/C, sobre la bisectriz y alejándose del punto medio del arco.

EJERCICIO 03

a) $E = \frac{k_e Q z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{(8{,}99\times10^{9})(5{,}0\times10^{-9})(0{,}20)}{(0{,}05)^{3/2}} \approx 804$ N/C, un 72 % de lo que daría una carga puntual a esa distancia. b) Derivando, $dE/dz = 0$ cuando $R^2 + z^2 = 3z^2$, es decir $z = R/\sqrt{2} = 0{,}0707$ m, donde $E_{\text{máx}} = \frac{2k_e Q}{3\sqrt{3}\,R^2}$.

a) $E \approx 804$ N/C a lo largo del eje, alejándose del anillo. b) $z \approx 7{,}07$ cm y $E_{\text{máx}} \approx 1{,}73 \times 10^{3}$ N/C.

EJERCICIO 04

a) Con s la distancia de cada trozo a P, $dq = \lambda\, ds$ y todos los aportes apuntan en la misma dirección: $E = \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{k_e \lambda\, ds}{s^2} = k_e\lambda\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+L}\right) = \frac{k_e \lambda L}{x_0(x_0+L)}$, que en unidades de $k_e\lambda/L$ vale 2,25. b) El cuarto cercano va de x_0 a $x_0 + L/4$: $E_{1/4} = k_e\lambda\left(\frac{1}{0{,}15} - \frac{1}{0{,}2625}\right) \approx 77{,}1$ N/C.

a) $E \approx 135$ N/C (134,85 N/C) a lo largo del eje, alejándose de la barra. b) Alrededor del 57 % del campo total.

09 PARA SEGUIR

LECTURAS

Física universitaria vol. 2 · 5.5 Cálculo de los campos eléctricos de las distribuciones de carga

Densidades λ, σ y ρ y los campos de línea, arco, anillo, disco y plano infinito.

OPENSTAX · CC BY 4.0 · ES

CURSOS ABIERTOS

MIT 8.02 (primavera 2007) · Cap. 2 Coulomb's Law (apuntes PDF)

Secciones 2.9 y 2.10: densidades de carga y campos de distribuciones continuas.

MIT OPENCOURSEWARE (P. DOURMASHKIN, J. BELCHER ET AL.) · CC BY-NC-SA 4.0 · EN

MIT 8.02 (primavera 2007) · Problem solving 2: Continuous charge distributions

Estrategia paso a paso y campo en el eje de una línea de carga.

MIT OPENCOURSEWARE (P. DOURMASHKIN, J. BELCHER ET AL.) · CC BY-NC-SA 4.0 · EN

Basada en: Apuntes de Electricidad y Magnetismo (J. Patiño, CFSA3440), Clase 2: secciones «De la suma a la integral» (clase02.tex, líneas 25 a 131) y «Campos conocidos: reconocer antes de usar» (líneas 409 a 470); documento complementario «Demostraciones de campos conocidos», capítulos 1 a 6. Autor de la clase: Benjamín Campos. Ficha de B&N Lectures, proyecto creado y dirigido por Nicolás Moreno; el texto, los ejercicios y las cifras son propios y se comprobaron con código. Fotogramas del video de la clase. © 2026 B&N Solutions · bnsolutions.cl/lectures