CLASE 06 · CAPÍTULO 2 · DISTRIBUCIONES CONTINUAS · 2:40 MIN

DENSIDADES NO UNIFORMES

Cuando la densidad cambia de un punto a otro, la integral de Coulomb se resuelve con la misma receta, pero la carga total ya no basta para conocer el campo.



VER LA CLASE

BNSOLUTIONS.CL/LECTURES

01 IDEAS CLAVE

La densidad puede depender de la posición

Una barra puede tener $\lambda(x) = \alpha x$ y un arco, $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta$. El elemento de carga se escribe igual que antes, $dq = \lambda\, ds$, pero ahora λ queda dentro de la integral. La carga total se obtiene integrando, $Q = \int dq$, y no multiplicando una densidad por una longitud.

Una receta de siete pasos

Fijar P y los ejes; escribir dq en la variable elegida; armar la geometría ($\vec{r}$, r y $\hat{r}$, desde el elemento hacia P); aplicar Coulomb y descomponer; usar la simetría si existe; integrar con límites justificados; y revisar unidades, signo, dirección y casos límite. Los siete pasos sirven para cualquier distribución, uniforme o no.

Componentes, no módulos

En general $\left|\int d\vec{E}\right| \neq \int \left|d\vec{E}\right|$. Si se suman los largos de los aportes, el resultado sale mayor que el campo real. Primero se descompone $d\vec{E}$ y después se integra cada componente por separado.

La simetría depende también de la densidad

En la barra con $\lambda = \alpha x$ y P en el origen todos los aportes están sobre el eje, así que no hay nada que cancelar. En el semicírculo con $\lambda_0 \cos\theta$ la densidad no es uniforme, pero es par en θ: los trozos en $+\theta$ y $-\theta$ tienen la misma carga y las componentes horizontales se cancelan. Lo que decide es si el integrando completo es par o impar, no solo la forma del dibujo.

La misma carga, otro campo

La barra del ejemplo tiene 0,16 nC y produce 39,5 N/C en el origen. Si esa misma carga se reparte de forma pareja, la fórmula de la barra uniforme da 47,9 N/C, un 21 % más. Un campo conocido exige la misma geometría, la misma uniformidad y la misma posición de P. Cuando el cálculo se complica al mover P, hace falta otra herramienta: la ley de Gauss, que viene en las próximas clases.

02 FÓRMULAS

$$d\vec{E} = k_e\, dq\, \frac{(x_P - x')\hat{x} + (y_P - y')\hat{y} + (z_P - z')\hat{z}}{\left[(x_P - x')^2 + (y_P - y')^2 + (z_P - z')^2\right]^{3/2}}$$

Aporte de un elemento en (x', y', z') al campo en P, ya escrito en componentes. Sirve cuando no hay simetría que aprovechar.

$$Q = \int dq = \int \lambda(s)\, ds$$

La carga total de una distribución no uniforme. La relación $\lambda = Q/\ell$ solo vale si la densidad es uniforme.

$$\vec{E}(0) = -k_e \alpha \ln\!\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}, \qquad Q = \frac{\alpha}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

Barra en $a \le x \le b$ con $\lambda = \alpha x$ y P en el origen. Si $\alpha > 0$ el campo apunta hacia $-x$, alejándose de la barra; el argumento del logaritmo es adimensional.

$$\lambda_0 = \frac{Q}{2R}, \qquad \vec{E}(P) = -\frac{\pi k_e \lambda_0}{2R}\,\hat{y}$$

Semicírculo de radio R con $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta$, θ medido desde el eje y y P en el centro. $E_x = 0$ por paridad; E_y sale de $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \pi/2$.

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(P)$$

Con el campo calculado, la fuerza sobre cualquier carga en P es una multiplicación. Si $q < 0$, la fuerza apunta en contra del campo.

03 EJEMPLO RESUELTO

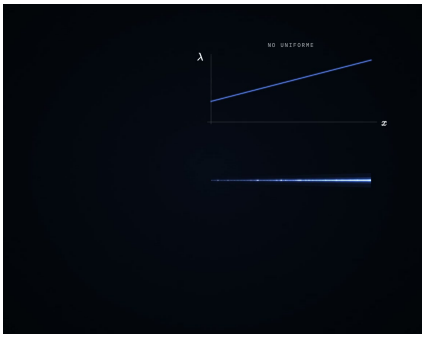
RESUELTO PASO A PASO

Una barra ocupa 0,10 m $\le x \le$ 0,30 m con densidad $\lambda(x) = \alpha x$, $\alpha = 4{,}0$ nC/m^2. Calcular el campo en el origen, la carga total y el campo que daría la misma carga repartida de forma pareja (las cifras del video).

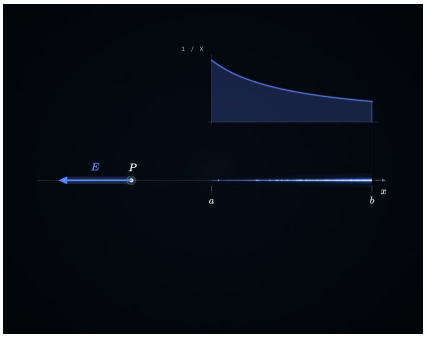
1. Elemento: $dq = \alpha x\, dx$. El trozo está a la derecha de P, así que $r = x$ y $\hat{r} = -\hat{x}$.
2. Aporte: $d\vec{E} = -k_e \frac{\alpha x\, dx}{x^2}\hat{x} = -k_e \alpha \frac{dx}{x}\hat{x}$. Todos los aportes van sobre el eje: no hay componentes que cancelar.
3. Integral: $\vec{E} = -k_e \alpha \int_a^b \frac{dx}{x}\,\hat{x} = -k_e \alpha \ln(b/a)\,\hat{x}$, con $\ln 3 = 1{,}0986$.
4. Números: $E = (8{,}99 \times 10^9)(4{,}0 \times 10^{-9})(1{,}0986) = 39{,}5$ N/C. Una suma directa de 200 000 trozos da lo mismo.
5. Revisión: $[k_e\alpha] =$ N/C; si $b \to a$, $\ln(b/a) \to 0$ y el campo desaparece con la barra. La carga es $Q = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) = 1{,}6 \times 10^{-10}$ C.
6. Comparación: con $\lambda = Q/L = 0{,}80$ nC/m, $L = 0{,}20$ m y $x_0 = 0{,}10$ m, la barra uniforme da $\frac{k_e \lambda L}{x_0(x_0+L)} = 47{,}9$ N/C.

RESULTADO $\vec{E}(0) \approx -39{,}5\,\hat{x}$ N/C y $Q = 0{,}16$ nC. Con la misma carga repartida de forma pareja el campo sería 47,9 N/C: la distribución importa, no solo la carga total.

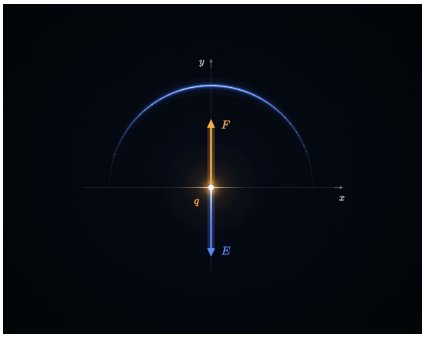
04 EN EL VIDEO



MINUTO 0:09



MINUTO 1:04



MINUTO 2:18

05 ¡OJO!

- No reemplazar $\lambda(x)$ por Q/L para usar una fórmula de la tabla: conserva la carga, pero cambia dónde está y, con ello, el campo.
- Una densidad no uniforme no destruye la simetría por sí sola. Hay que revisar si λ es par o impar en la variable

que se quiere cancelar.

- Antes de sacar algo de la integral, comprobar que no dependa de la variable de integración: en el semicírculo $r = R$ es constante, pero $\hat{r}$ no.
- El signo de la respuesta lo fija el de la carga: con $\alpha < 0$ el campo de la barra apunta hacia ella, no se aleja.

06 PARA PENSAR

? En la barra con $\lambda = \alpha x$, los trozos lejanos tienen más carga. ¿Por qué igual pesan menos en el campo del origen?

? Si en el semicírculo la densidad fuera $\lambda_0 \cos^2\theta$, ¿seguiría siendo cero E_x en el centro? ¿Y si fuera $\lambda_0 \sin\theta$?

? ¿Puede una distribución con carga total cero producir un campo distinto de cero en algún punto? Piense en un ejemplo.

? ¿Qué cambia en la receta si P se mueve fuera del eje de la barra?

07 EJERCICIOS

DIFICULTAD ●○○ DIRECTA ●●○ COMBINA IDEAS ●●● DESAFÍO · SOLUCIONES AL FINAL

01 ●○○

Una barra ocupa $0 \le x \le L$, con $L = 0{,}50$ m, y su densidad crece de forma lineal: $\lambda(x) = \lambda_0\, x/L$, con $\lambda_0 = 6{,}0$ nC/m. Calcular su carga total.

02 ●○○

Una barra ocupa $0{,}05\ \text{m} \le x \le 0{,}20$ m con $\lambda(x) = \alpha x$ y $\alpha = -2{,}0$ nC/m^2. Calcular el campo en el origen, con su sentido.

03 ●●○

Una carga de $8{,}0\ \mu$C se reparte en un semicírculo de radio $R = 0{,}50$ m con $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta$, θ medido desde el eje y ($-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$). a) Calcular λ_0. b) Calcular el campo en el centro. c) Calcular la fuerza sobre una carga de $+3{,}0\ \mu$C puesta en el centro.

04 ●●●

Con la geometría del ejercicio anterior, ahora con $R = 0{,}30$ m, la densidad es $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin\theta$ con $\lambda_0 = 4{,}0\ \mu$C/m: positiva a la derecha del eje y y negativa a la izquierda. Calcular la carga total y el campo en el centro.

08 SOLUCIONES

EJERCICIO 01

$Q = \int_0^L \lambda_0 \frac{x}{L}\, dx = \frac{\lambda_0}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{\lambda_0 L}{2} = \frac{(6{,}0\times10^{-9})(0{,}50)}{2}$. Es la mitad de lo que tendría con λ_0 uniforme.

$Q = 1{,}5$ nC.

EJERCICIO 02

El resultado general es $\vec{E}(0) = -k_e \alpha \ln(b/a)\,\hat{x}$. Con $\alpha < 0$ el signo se invierte: $\vec{E} = +(8{,}99\times10^{9})(2{,}0\times10^{-9})\ln 4\,\hat{x}$, con $\ln 4 = 1{,}386$.

$\vec{E}(0) \approx +24{,}9\,\hat{x}$ N/C: apunta hacia la barra, que tiene carga negativa.

EJERCICIO 03

a) $Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 \cos\theta\, R\, d\theta = 2\lambda_0 R$, así que $\lambda_0 = Q/(2R) = 8{,}0\ \mu$C/m. b) $E_x = 0$ por paridad y $E_y = -\frac{k_e\lambda_0}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = -\frac{\pi k_e \lambda_0}{2R} = -2{,}26\times10^{5}$ N/C. c) $\vec{F} = q\vec{E} = (3{,}0\times10^{-6})(-2{,}259\times10^{5})\,\hat{y}$.

a) $\lambda_0 = 8{,}0\ \mu$C/m. b) $\vec{E} \approx -2{,}26\times10^{5}\,\hat{y}$ N/C. c) $\vec{F} \approx -0{,}678\,\hat{y}$ N, en el mismo sentido que el campo porque $q > 0$.

EJERCICIO 04

Carga: $Q = \lambda_0 R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta = 0$. Aporte: $d\vec{E} = -\frac{k_e\lambda_0}{R}\sin\theta\,(\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y})\,d\theta$. Ahora el integrando de E_y, $\sin\theta\cos\theta$, es impar y se anula; el de E_x, $\sin^2\theta$, es par y sobrevive: $E_x = -\frac{k_e\lambda_0}{R}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi(8{,}99\times10^{9})(4{,}0\times10^{-6})}{2(0{,}30)}$.

$Q = 0$, pero $\vec{E} \approx -1{,}88\times10^{5}\,\hat{x}$ N/C: apunta desde la mitad positiva hacia la negativa.

09 PARA SEGUIR

LECTURAS

Física universitaria vol. 2 · 5.5 Cálculo de los campos eléctricos de las distribuciones de carga

El método dq = λ dl sirve igual cuando λ depende de la posición; repasa la integral antes de cambiar λ.

OPENSTAX · CC BY 4.0 · ES

CURSOS ABIERTOS

MIT 8.02 (primavera 2007) · Problem solving 2: Continuous charge distributions

Plantear dq y la integral; luego repetir con una densidad variable.

MIT OPENCOURSEWARE (P. DOURMASHKIN, J. BELCHER ET AL.) · CC BY-NC-SA 4.0 · EN

MIT 8.02 (primavera 2007) · Cap. 2 Coulomb's Law (apuntes PDF)

Sección 2.10 y problemas resueltos de distribuciones continuas.

MIT OPENCOURSEWARE (P. DOURMASHKIN, J. BELCHER ET AL.) · CC BY-NC-SA 4.0 · EN

Basada en: Apuntes de Electricidad y Magnetismo (J. Patiño, CFSA3440), Clase 2: «La receta para calcular el campo» (clase02.tex, líneas 133 a 209), los dos ejercicios guiados de densidad no uniforme (líneas 211 a 407) y «Cierre: necesitamos otra herramienta» (líneas 472 a 510). En el ejercicio del semicírculo los apuntes calculan con k_e = 9 × 10⁹ N·m²/C²; esta ficha usa 8,99 × 10⁹ N·m²/C², y con ella el campo de ese ejercicio (12 µC, R = 0,60 m) da 2,354 × 10⁵ N/C en lugar de 2,356 × 10⁵ N/C. Ficha de B&N Lectures, proyecto creado y dirigido por Nicolás Moreno; el texto, los ejercicios y las cifras son propios y se comprobaron con código. Fotogramas del video de la clase. © 2026 B&N Solutions · bnsolutions.cl/lectures