

CLASE 08 · CAPÍTULO 3 · FLUJO Y LEY DE GAUSS · 3:14 MIN

LA LEY DE GAUSS

El flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada depende solo de la carga neta que encierra, dividida por ε_0.

VER LA CLASE

BNSOLUTIONS.CL/LECTURES

01 IDEAS CLAVE

Una demostración en cuatro pasos

Primero, una carga puntual en el centro de una esfera, que es el único cálculo con integrales. Después se muestra que el resultado no cambia con la forma de la superficie, que una carga exterior aporta flujo cero y, por superposición, que todo se generaliza a cualquier número de cargas.

En la esfera, el radio desaparece

Sobre una esfera centrada en q, el campo es paralelo a la normal y tiene el mismo módulo $k_e q/r^2$ en todos los puntos, así que sale de la integral y queda el área $4\pi r^2$. El flujo es $4\pi k_e q = q/\varepsilon_0$, sin rastro de r: al duplicar el radio el campo se reduce a un cuarto y el área se cuadruplica. Si la ley de Coulomb fuera $1/r^3$, el flujo dependería del radio y no habría ley de Gauss.

El ángulo sólido

Si la superficie se abolla, un parche queda más cerca de la carga (campo más intenso), pero también más inclinado. Su aporte es $k_e q\, dA \cos\theta/r^2 = k_e q\, d\Omega$, donde $d\Omega$ es el ángulo sólido con que se ve el parche desde la carga. Ese cociente no cambia con la distancia, y el espacio completo mide 4π sr, así como la vuelta completa en el plano mide 2π rad. Por eso ninguno de los dos efectos gana y el flujo vuelve a ser q/ε_0, sin importar la forma ni dónde esté la carga adentro.

Carga afuera: flujo cero, campo no

Si la carga está fuera, cada cono que sale de ella corta la superficie un número par de veces. Al entrar y al salir subtiende el mismo $d\Omega$ con signos opuestos, de modo que los aportes se cancelan cono por cono. El campo de esa carga no es cero en ningún punto de la superficie; lo que se anula es la suma: entran tantas líneas como salen.

Siempre verdadera, no siempre útil

Como el campo total es la suma de los campos y la integral es lineal, el flujo total es la suma de los flujos: las cargas de adentro aportan q_i/ε_0 y las de afuera, cero. La ley vale para cualquier distribución y cualquier superficie, pero despejar E exige sacarlo de la integral, y eso solo es posible con simetría. Gauss la obtuvo en 1813 estudiando la gravedad, que también decae como $1/r^2$, y es la primera de las ecuaciones de Maxwell. La próxima clase la aplica a los casos con simetría.

02 FÓRMULAS

$$\Phi_E = \frac{k_e q}{r^2}\oint dA = \frac{k_e q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Paso 1: carga puntual en el centro de una esfera de radio r. Usa $k_e = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.

$$d\Omega = \frac{dA\cos\theta}{r^2}, \qquad \oint d\Omega = 4\pi \text{ sr}$$

Ángulo sólido de un parche visto desde un punto a distancia r; θ es el ángulo entre la normal y la dirección radial. El total vale 4π si el punto está adentro y 0 si está afuera.

$$\Omega_{\text{cono}} = 2\pi\,(1-\cos\alpha)$$

Ángulo sólido de un cono de semiapertura α. Con $\alpha = \pi$ se recupera el espacio completo, 4π.

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Ley de Gauss. S es cualquier superficie cerrada con normal exterior; $\vec{E}$ es el campo total, de todas las cargas; Q_{enc} es la carga neta encerrada.

$$Q_{\text{enc}} = \int_V \rho\, dV$$

Si la carga es continua, la carga encerrada se calcula como en la Clase 2 (o con $\lambda\, ds$ y $\sigma\, dA$, según el caso), integrando solo la parte que queda dentro de S.

03 EJEMPLO RESUELTO

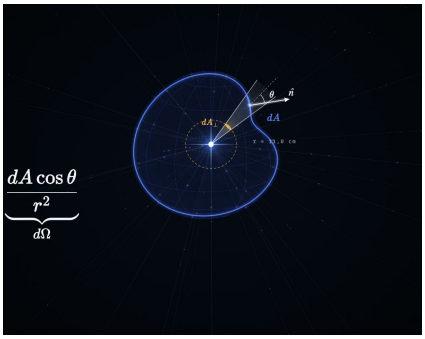
RESUELTO PASO A PASO

Una carga $q = 1{,}0$ nC está en el centro de una esfera de 12 cm de radio (las cifras del video). Calcular el campo sobre la esfera, su área y el flujo. Repetir con una esfera de 24 cm.

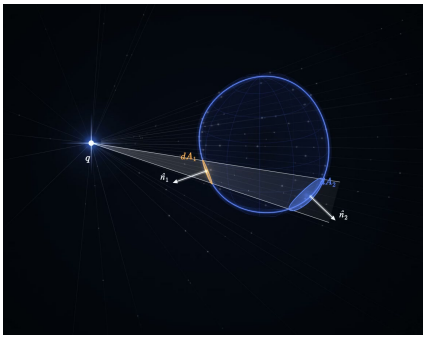
1. Campo: $E = \frac{k_e q}{r^2} = \frac{(8{,}99\times10^{9})(1{,}0\times10^{-9})}{0{,}12^2} = 624{,}3$ N/C, radial y paralelo a la normal exterior en todo punto.
2. Área: $A = 4\pi r^2 = 4\pi(0{,}12)^2 = 0{,}1810$ m^2.
3. Flujo: como $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$ y E es constante sobre la esfera, $\Phi_E = EA \approx 113$ N m^2/C.
4. Con la ley: $\Phi_E = q/\varepsilon_0 = 1{,}0\times10^{-9}/8{,}854\times10^{-12} = 112{,}9$ N m^2/C. La diferencia en la cuarta cifra con el paso anterior solo viene de redondear k_e.
5. Con $r = 24$ cm: $E = 156{,}1$ N/C (un cuarto) y $A = 0{,}7238$ m^2 (cuatro veces), así que el producto no cambia. Una integración numérica en 3D da lo mismo aunque la carga se corra 5 cm del centro.

RESULTADO $\Phi_E \approx 113$ N m^2/C ($q/\varepsilon_0 = 112{,}9$) en ambas esferas: el flujo no depende del radio.

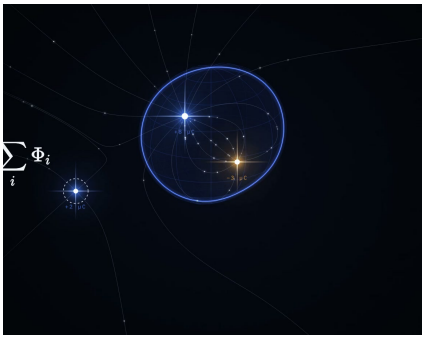
04 EN EL VIDEO



MINUTO 1:18



MINUTO 2:03



MINUTO 2:25

05 ¡OJO!

- El $\vec{E}$ de la integral es el campo total, que incluye el de las cargas de afuera. Esas cargas sí modifican el campo sobre la superficie; lo que no modifican es el flujo neto.
- Q_{enc} es la carga neta de adentro: $+8\ \mu$C y $-3\ \mu$C encerrados dan $+5\ \mu$C.
- La superficie gaussiana es imaginaria: no está cargada ni es un conductor, y se dibuja donde convenga.
- Flujo cero no implica campo cero sobre la superficie. Y sin simetría la ley sigue siendo cierta, pero no permite despejar E: hay que volver a Coulomb.

06 PARA PENSAR

? Si se encoge una superficie gaussiana alrededor de una carga hasta que sea muy pequeña, el campo sobre ella crece sin límite. ¿Por qué el flujo no crece?

? En un espacio de cuatro dimensiones, el «área» de una esfera crecería como r^3. ¿Cómo tendría que caer el campo de una carga para que siguiera valiendo una ley de Gauss?

? Una superficie cerrada tiene flujo neto cero. ¿Se puede concluir que no hay ninguna carga dentro de ella?

? La gravedad de Newton también cae como $1/r^2$. ¿Qué haría el papel de Q_{enc} en una ley de Gauss para la gravedad, y qué signo tendría el flujo?

07 EJERCICIOS

DIFICULTAD ●○○ DIRECTA ●●○ COMBINA IDEAS ●●● DESAFÍO · SOLUCIONES AL FINAL

01 ●○○

Dentro de una superficie cerrada hay una carga de $+8{,}0\ \mu$C y otra de $-3{,}0\ \mu$C; afuera hay una de $+2{,}0\ \mu$C. Calcular el flujo eléctrico neto.

02 ●○○

Una carga de 2,0 nC está en el centro de un cubo de 0,20 m de arista. Calcular el flujo total y el flujo por una sola cara.

03 ●●○

Una carga de 3,0 nC está sobre el eje de un disco de radio 0,15 m, a 0,20 m de su centro. Usando el ángulo sólido, calcular el flujo de su campo a través del disco.

04 ●●●

Una esfera de radio $R = 0{,}30$ m tiene una densidad de carga $\rho(r) = \rho_0\, r/R$ con $\rho_0 = 2{,}0\ \mu\text{C/m}^3$. Calcular el flujo eléctrico a través de esferas concéntricas de radio a) 0,15 m y b) 0,40 m.

08 SOLUCIONES

EJERCICIO 01

Solo cuenta la carga neta encerrada: $Q_{\text{enc}} = 8{,}0 - 3{,}0 = 5{,}0\ \mu\text{C}$. Entonces $\Phi_E = \frac{5{,}0\times10^{-6}}{8{,}854\times10^{-12}}$. La carga exterior aporta cero.

$\Phi_E \approx 5{,}65 \times 10^5\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{C}$.

EJERCICIO 02

Total: $\Phi_E = q/\varepsilon_0 = 2{,}0 \times 10^{-9}/8{,}854 \times 10^{-12} = 225{,}9\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{C}$. Las seis caras son equivalentes respecto de la carga, así que cada una recibe un sexto: $q/(6\varepsilon_0)$. La arista no interviene.

Total $\approx 226\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{C}$; **por cada cara** $\approx 37{,}6\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{C}$.

EJERCICIO 03

Desde la carga, el disco se ve como un cono de semiapertura α con $\cos\alpha = \frac{0{,}20}{\sqrt{0{,}20^2+0{,}15^2}} = 0{,}80$. Su ángulo sólido es $\Omega = 2\pi(1-0{,}80) = 0{,}4\pi = 1{,}257$ sr, una décima parte de 4π. Entonces $\Phi = k_e q\,\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\Omega}{4\pi}$. Integrar E_z sobre coronas da el mismo valor.

$\Phi_E \approx 33{,}9\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{C}$, **la décima parte de** q/ε_0.

EJERCICIO 04

Con cáscaras $dV = 4\pi r'^2\,dr'$: $Q_{\text{enc}}(r) = \int_0^r \rho_0 \frac{r'}{R}\,4\pi r'^2\,dr' = \frac{\pi\rho_0 r^4}{R}$ para $r \le R$. a) $Q_{\text{enc}} = \pi\rho_0 R^3/16 = 1{,}060\times10^{-8}$ C, que es $1/16$ del total. b) Fuera de la esfera se encierra toda la carga: $Q = \pi\rho_0 R^3 = 1{,}696\times10^{-7}$ C. En ambos casos, $\Phi_E = Q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$.

a) $\Phi_E \approx 1{,}20\times10^3\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{C}$. **b)** $\Phi_E \approx 1{,}92\times10^4\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{C}$.

09 PARA SEGUIR

LECTURAS

Física universitaria vol. 2 · 6.2 Explicar la ley de Gauss

Enunciado de la ley, superficies gaussianas y por qué solo cuenta la carga encerrada.

OPENSTAX · CC BY 4.0 · ES

Feynman Lectures Vol. II · Cap. 4 Electrostatics

Secciones 4-5 y 4-6: el flujo de E y la ley de Gauss con su forma diferencial.

RICHARD P. FEYNMAN (CALTECH) · LECTURA LIBRE EN LÍNEA (© CALTECH) · EN

CURSOS ABIERTOS

MIT 8.02 (primavera 2007) · Cap. 4 Gauss's Law (apuntes PDF)

Sección 4.2 «Gauss's Law».

MIT OPENCOURSEWARE (P. DOURMASHKIN, J. BELCHER ET AL.) · CC BY-NC-SA 4.0 · EN

Basada en: Apuntes de Electricidad y Magnetismo (J. Patiño, CFSA3440), Clase 3: «Demostración guiada de la ley de Gauss», pasos 1 a 4 y recuadro del ángulo sólido (clase03.tex, líneas 893 a 1457), y «De dónde viene y por qué importa» (líneas 1460 a 1572). Ficha de B&N Lectures, proyecto creado y dirigido por Nicolás Moreno; el texto, los ejercicios y las cifras son propios y se comprobaron con código. Fotogramas del video de la clase. © 2026 B&N Solutions · bnsolutions.cl/lectures