

CLASE 09 · CAPÍTULO 3 · FLUJO Y LEY DE GAUSS · 3:11 MIN

GAUSS EN ACCIÓN

Con la simetría adecuada, la ley de Gauss entrega el campo de una distribución en pocas líneas: todo depende de elegir bien la superficie y de contar bien la carga encerrada.

VER LA CLASE

BNSOLUTIONS.CL/LECTURES

01 IDEAS CLAVE

Sacar el campo de la integral

La ley $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{\text{enc}}/\varepsilon_0$ se cumple para cualquier superficie cerrada, pero solo permite despejar E si se puede sacar de la integral. Para eso, en cada parte de la superficie debe ocurrir una de dos cosas: que $\vec{E}$ tenga módulo constante y sea paralelo a $d\vec{A}$ (aporta $\pm EA$), o que sea tangente a la superficie (aporta cero). Encontrar esa superficie es el verdadero trabajo; lo demás es álgebra.

Tres simetrías que cooperan

Con simetría esférica se usa una esfera concéntrica y aporta toda su área, $4\pi r^2$. Con simetría cilíndrica (línea o cilindro infinitos) se usa un cilindro coaxial y solo aporta el manto, $2\pi rL$. Con simetría laminar (plano infinito) se usa una píldora o una caja que atraviesa el plano y solo aportan las dos tapas, $2A$.

Seis pasos

Identificar la simetría y, con ella, la dirección de $\vec{E}$; elegir la superficie gaussiana que pasa por el punto de interés; calcular el flujo parte por parte; calcular Q_{enc}; igualar y despejar; y entregar el vector con su sentido. El cuarto paso es el que más se equivoca: la carga encerrada depende de dónde se dibujó la superficie, y dentro de la materia cargada hay que integrar la densidad solo hasta r.

Los casos clásicos devuelven a Coulomb

La carga puntual, la línea infinita, el plano infinito y el cascarón dan, con Gauss, exactamente los mismos campos que se obtuvieron sumando aportes con Coulomb, pero sin integrales difíciles. En la línea se cancela el largo L del cilindro y en el plano se cancela el área A de la tapa: como esas medidas las elige uno, el campo no puede depender de ellas. Que el campo del plano no dependa de la distancia queda a la vista.

Esfera maciza y límites del método

En una esfera con ρ uniforme, afuera el campo es el de una carga puntual en el centro; adentro la gaussiana encierra Qr^3/R^3 y el campo crece en línea recta con r. El resultado es continuo en $r = R$, a diferencia del cascarón, que salta de cero a $k_e q/R^2$. Un anillo, un disco finito o una barra de largo finito no tienen una superficie donde E sea constante: la ley sigue siendo cierta, pero no sirve para despejar el campo y hay que volver a integrar con Coulomb.

02 FÓRMULAS

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; E = k_e\frac{q}{r^2}$$

Carga puntual, con una esfera gaussiana de radio r centrada en ella.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k_e\lambda}{r}$$

Línea infinita con densidad lineal λ; r es la distancia al eje. El campo es radial.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Plano infinito con densidad superficial σ: perpendicular al plano, igual a ambos lados y sin depender de la distancia.

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ k_e\dfrac{q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

Cascarón esférico delgado de radio R y carga q.

$$Q_{\text{enc}} = Q\frac{r^3}{R^3}, \qquad E(r) = \begin{cases} \dfrac{k_eQ}{R^3}\,r, & r \le R \\ \dfrac{k_eQ}{r^2}, & r \ge R \end{cases}$$

Esfera maciza de radio R con carga Q repartida uniformemente en su volumen.

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^r \rho(r')\,4\pi r'^2\,dr'$$

Carga encerrada por una esfera de radio r cuando la densidad depende solo de la distancia al centro.

03 EJEMPLO RESUELTO

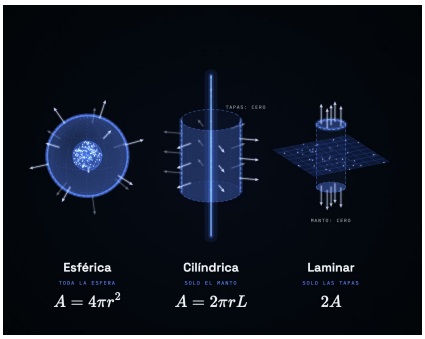
RESUELTO PASO A PASO

Una esfera maciza aislante de radio $R = 10$ cm tiene una carga $Q = 1{,}0$ nC repartida uniformemente en su volumen (los valores del video). Calcule el campo a $r = 5{,}5$ cm del centro, en la superficie y a 20 cm del centro.

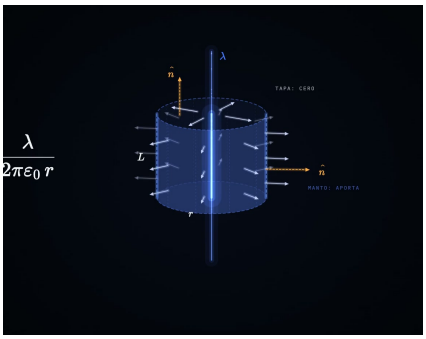
1. Simetría esférica: $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$, y la gaussiana es una esfera concéntrica de radio r, con flujo $E\,(4\pi r^2)$.
2. Adentro ($r = 5{,}5$ cm) la gaussiana solo encierra una parte: $Q_{\text{enc}} = Q\,r^3/R^3 = (1{,}0\text{ nC})(0{,}55)^3 = 0{,}166$ nC.
3. Igualando, $E = k_eQ_{\text{enc}}/r^2 = k_eQ\,r/R^3 = (8{,}99\times10^9)(1{,}0\times10^{-9})(0{,}055)/(0{,}10)^3 = 494$ N/C.
4. En la superficie las dos ramas coinciden: $E(R) = k_eQ/R^2 = 899$ N/C, el máximo.
5. Afuera la gaussiana encierra toda la carga: $E(0{,}20\text{ m}) = k_eQ/r^2 = (8{,}99\times10^9)(1{,}0\times10^{-9})/(0{,}20)^2 = 225$ N/C, como si la carga estuviera en el centro.

RESULTADO $E = 494$ N/C a 5,5 cm, 899 N/C en la superficie y 225 N/C a 20 cm, todos radiales hacia afuera.

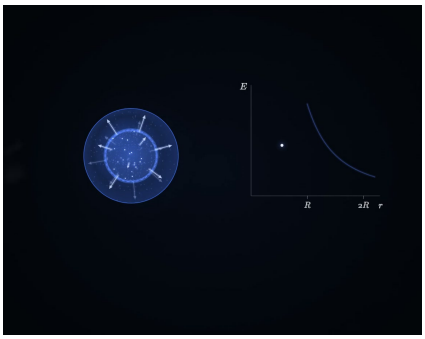
04 EN EL VIDEO



MINUTO 0:33



MINUTO 1:17



MINUTO 2:23

05 ¡OJO!

- La carga encerrada depende de la superficie que se dibujó. Para un punto dentro de la materia cargada se cuenta solo la carga que queda dentro de la gaussiana.
- El $\vec{E}$ de la ley de Gauss es el campo total, que incluye el de cargas que quedan fuera de la superficie. Por eso, sin simetría, conocer el flujo no basta para conocer el campo.
- $E = \sigma/2\varepsilon_0$ y $E = 2k_e\lambda/r$ valen para un plano y una línea infinitos. Para un disco o una barra finitos son buenas aproximaciones solo cerca y lejos de los bordes.
- Gauss entrega el módulo; el sentido se decide al final con el signo de la carga encerrada. Si $Q_{\text{enc}} < 0$, el campo apunta hacia la distribución.

06 PARA PENSAR

? ¿Por qué un cubo con una carga en su centro no sirve como superficie gaussiana para despejar el campo, aunque la ley de Gauss se cumpla sobre él?

? Dentro de una esfera maciza el campo crece al alejarse del centro, aunque uno se aleja de la carga. ¿Qué compite con qué?

? Si el plano cargado tuviera un borde a 1 m del punto de interés, ¿qué paso del razonamiento de la píldora dejaría de ser válido?

07 EJERCICIOS

DIFICULTAD ●○○ DIRECTA ●●○ COMBINA IDEAS ●●● DESAFÍO · SOLUCIONES AL FINAL

01 ●○○

Un alambre recto muy largo tiene una densidad de carga uniforme $\lambda = 5{,}0$ nC/m. Calcule el módulo del campo eléctrico a 4,0 cm del alambre.

02 ●○○

Un plano muy extenso tiene una densidad superficial uniforme $\sigma = -3{,}0\ \mu\text{C/m}^2$. Dé el módulo y el sentido del campo a ambos lados del plano.

03 ●●○

Un cascarón esférico delgado de radio $R = 10$ cm tiene una carga +4,0 nC repartida uniformemente, y en su centro hay una carga puntual de −2,0 nC. Calcule el campo a 5,0 cm y a 20 cm del centro.

04 ●●●

Una esfera aislante de radio $R = 5{,}0$ cm tiene una densidad de carga que crece con la distancia al centro, $\rho(r) = C\,r$, y su carga total es $Q = 8{,}0$ nC. Encuentre C y el campo en $r = R/2$ y en $r = R$.

08 SOLUCIONES

EJERCICIO 01

Con un cilindro coaxial, $E\,(2\pi rL) = \lambda L/\varepsilon_0$, de donde $E = 2k_e\lambda/r = 2(8{,}99\times10^{9})(5{,}0\times10^{-9})/0{,}040$.

$E = 2{,}25\times10^{3}$ N/C, radial y alejándose del alambre.

EJERCICIO 02

Con una píldora que atraviesa el plano, $2EA = |\sigma|A/\varepsilon_0$, así que $E = |\sigma|/2\varepsilon_0 = (3{,}0\times10^{-6})/(2\cdot8{,}854\times10^{-12})$. Como $\sigma<0$, el campo apunta hacia el plano.

$E = 1{,}69\times10^{5}$ N/C a ambos lados, perpendicular al plano y dirigido hacia él.

EJERCICIO 03

Gaussianas esféricas concéntricas. A 5,0 cm solo se encierra la carga del centro: $Q_{\text{enc}} = -2{,}0$ nC y $E = k_e|Q_{\text{enc}}|/r^2 = (8{,}99\times10^{9})(2{,}0\times10^{-9})/(0{,}050)^2$, hacia el centro. A 20 cm se encierra todo: $Q_{\text{enc}} = +2{,}0$ nC y $E = (8{,}99\times10^{9})(2{,}0\times10^{-9})/(0{,}20)^2$, hacia afuera.

$7{,}19\times10^{3}$ N/C hacia el centro a 5,0 cm; 450 N/C hacia afuera a 20 cm.

EJERCICIO 04

La carga encerrada es $Q_{\text{enc}}(r) = \int_0^r Cr'\,4\pi r'^2\,dr' = \pi Cr^4$. Con $r = R$, $C = Q/(\pi R^4)$. Entonces $Q_{\text{enc}} = Q\,r^4/R^4$ y la gaussiana esférica da $E = k_eQ_{\text{enc}}/r^2 = k_eQ\,r^2/R^4$. En $R/2$: $E = k_eQ/(4R^2)$; en R: $E = k_eQ/R^2$.

$C = 4{,}07\times10^{-4}$ C/m^4; $E(R/2) = 7{,}19\times10^{3}$ N/C y $E(R) = 2{,}88\times10^{4}$ N/C, radiales hacia afuera.

09 PARA SEGUIR

LECTURAS

Física universitaria vol. 2 · 6.3 Aplicación de la ley de Gauss
Simetrías esférica, cilíndrica y plana con sus superficies gaussianas y ejemplos.
OPENSTAX · CC BY 4.0 · ES

Feynman Lectures Vol. II · Cap. 5 Application of Gauss' Law
Campos de línea, lámina y esfera de carga obtenidos con la ley de Gauss.
RICHARD P. FEYNMAN (CALTECH) · LECTURA LIBRE EN LÍNEA (© CALTECH) · EN

Feynman Lectures Vol. II · Cap. 4 Electrostatics
Sección 4-7: campo de una esfera de carga uniforme.
RICHARD P. FEYNMAN (CALTECH) · LECTURA LIBRE EN LÍNEA (© CALTECH) · EN

CURSOS ABIERTOS

MIT 8.02 (primavera 2007) · Cap. 4 Gauss's Law (apuntes PDF)
Sección 4.2 y problema 4.8.1 (dos planos infinitos).
MIT OPENCOURSEWARE (P. DOURMASHKIN, J. BELCHER ET AL.) · CC BY-NC-SA 4.0 · EN

MIT 8.02 (primavera 2007) · Problem solving 3: Gauss's law
Metodología para aplicar Gauss y ejercicio de cilindros concéntricos.
MIT OPENCOURSEWARE (P. DOURMASHKIN, J. BELCHER ET AL.) · CC BY-NC-SA 4.0 · EN

Basada en: Apuntes de Electricidad y Magnetismo (J. Patiño, CFSA3440), Clase 3, secciones «Cómo se usa: la receta de Gauss» (con «Las tres simetrías del curso»), «Los casos clásicos» (carga puntual, línea infinita, plano infinito, cascarón, ejemplo guiado de la esfera maciza y «El balance») y «El siguiente paso» (clase03.tex, líneas 1573 a 2298). Ficha de B&N Lectures, proyecto creado y dirigido por Nicolás Moreno; el texto, los ejercicios y las cifras son propios y se comprobaron con código. Fotogramas del video de la clase. © 2026 B&N Solutions · bnsolutions.cl/lectures